Untersuchung der Genauigkeit des planaren rektilinearen Koordinatennetzes in der alten chinesischen Kartographie

Von M. MARKYTAN[1]
Österreichische Akademie der Wissenschaften

Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 17. Juni 1993
durch das w. M. OTTO HITTMAIR.

Auszug

Mit Hilfe eines horizontalen und vertikalen Breitenkreissystems wird die Genauigkeit eines planaren, rektilinearen Koordinatennetzes untersucht, wie es eine alte kartographische Darstellung Chinas aufweist. Es erweist sich als notwendig, den Referenzäquator durch einen vorgegebenen Koordinatenursprung verlaufen zu lassen. Die Beziehung zwischen den Längen und Breiten vor und nach der entsprechenden Rotation ermöglicht dann gegebenenfalls den Vergleich mit modernen kartographischen Darstellungen.

1. Einleitung und Problemstellung

In der frühen chinesischen planaren Landvermessung und Kartographie wurden u. a. der bereits vor 2000 v. Chr. bekannte magnetische Kompaß (1), seit der Zeit von Pei Xiu (224–271) ein engmaschiges rektilineares Nord-Süd/Ost-West-Koordinatennetz (2) und ein noch vor der Zeit des bedeutenden Astronomen und Physikers Shen Gua (1031–1094) im Jahre 1027 konstruierter, in einen Wagen eingebauter Wegmesser (2) verwendet. Die im Jahre 1137 auf Stein gravierte Karte Chinas (Abb. 1) zeigt beeindruckend die Küstenlinien und Flußsysteme in einem solchen rektilinearen Netz von 100 Li (50 km) Maschenlänge. Sie zeugt vom überaus hohen Stand der chinesischen Land- und Küstenvermessung in der nördlichen Song- (960–1126, Hauptstadt: Kaifeng) und südlichen Song-Zeit (1126–1260, Hauptstadt: Hanzhou), und sie ist die genaueste großflächige kartographische Darstellung der damaligen Zeit. Es ist bemerkenswert, daß bereits in alten Zeiten und oft mit recht primitiven Mitteln, wie z. B. bei der Erfassung der gesamten Polarregion durch die Eskimos (1), kartographische Ergebnisse erzielt wurden, die in großen Umrissen den modernen nicht viel nachstehen.

Das Institut für Kartographie der Österreichischen Akademie der Wissenschaften interessiert sich für die Frage, welcher modernen kartographischen Projektion das chinesische rektilineare Koordinatennetz nahekommt und wie genau die (in Abb. 1 aufscheinenden sowie nicht eingezeichneten) Details der Karte Chinas von 1137 wiedergegeben sind (3). Das läuft auf die Frage hinaus, welches Liniensystem auf der Kugel-

[1] Tel. (0043-1) 55 73 28 DW 35

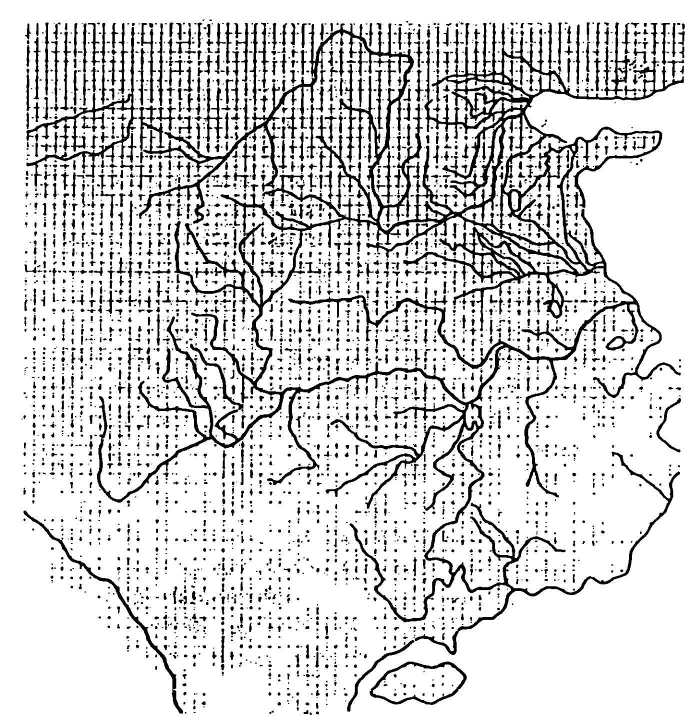


Abb. 1. Auf Stein gravierte Karte Chinas mit rektilinearem Koordinatennetz (50 x 50 km²) aus dem Jahr 1137 (von Ref. [2]).

oberfläche der Erde, über die gesamte Fläche Chinas genommen, mit großer Genauigkeit als ein approximativ rektilineares Koordinatensystem betrachtet werden könnte. Dann wäre es legitim, dieses kurvilineare, approximativ rektilineare Koordinatensystem mit gleich guter Genauigkeit planar darzustellen.

Im folgenden soll mit Hilfe eines einfachen, wohl nicht unbekannten Modells dargelegt werden, welche Wahl eines kurvilinearen Koordinatensystems und dessen Ursprungs zu einem genügend genauen planaren rektilinearen Koordinatennetz führt. Damit wäre die Beantwortung der Fragestellung des Instituts für Kartographie in Hinblick auf die damaligen Genauigkeitsansprüche für Kartendetails bereits im Problem selbst enthalten.

2. Horizontale und vertikale Breitenkreise

Ein Netz von horizontalen und vertikalen Breitenkreisen ist das einfachste kurvilineare System, das intuitiv auf der Kugeloberfläche der Erde über beschränkte Flächen approximativ rektilinear ist (Abb. 2). Dieses System enthält als Kreise mit vollem Erdumfang einen Meridian

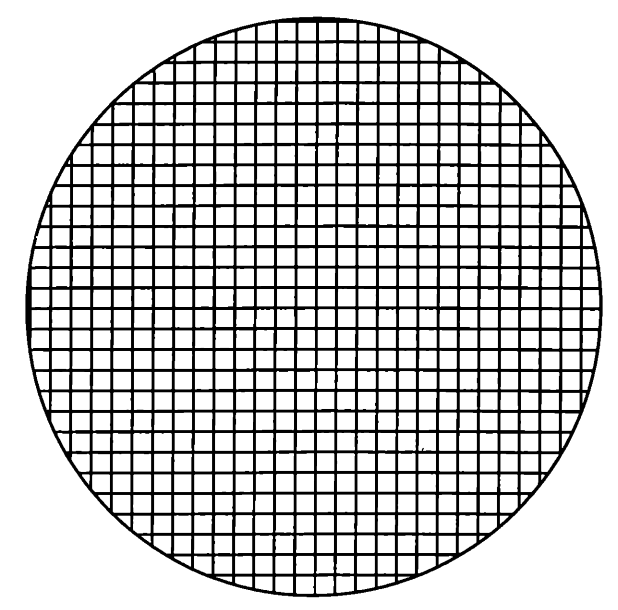


Abb. 2. System von horizontalen und vertikalen parallelen Breitenkreisen auf der Kugeloberfläche der Erde.

und den Äquator. Als Referenzmeridian werde derjenige Meridian gewählt, der durch das Zentrum Chinas (z. B. die Städte Kaifeng oder Wuhan) verläuft, während der Äquator vorläufig in seiner Standardlage belassen sei.

Jeder Punkt P auf der Kugeloberfläche der Erde mit Länge ϕ und Breite λ kann bezüglich dieses speziellen Horizontal- und Vertikal-Kreissystems sowohl durch die Längenabschnitte (l_1, l_2) auf dem Äquator bzw. Referenzmeridian als auch durch die Längenabschnitte $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ auf dem durch P verlaufenden horizontalen bzw. vertikalen Breitenkreis angegeben werden. Offenbar werden $\bar{l}_1$ $(\bar{l}_2)$ und l_1 (l_2) für für Punkte P in der Nähe des Referenzmeridians (Äquators) kaum differieren, jedoch in größeren Abständen von diesen Referenzkreisen stärkere Diskrepanzen aufweisen. Es gilt daher die Veränderung von $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ in Abhängigkeit von (l_1, l_2) bzw. von den Winkeln κ (des Schnittpunkts zwischen vertikalem Breitenkreis durch P und Äquator) und λ (des horizontalen Breitenkreises durch P) zu ermitteln, wobei $\kappa(\text{rad}) = l_1/R$, $\lambda(\text{rad}) = l_2/R$ und $R = 6366{,}2$ km der Erdradius sind.

Die trigonometrische Rechnung ergibt:

$$\bar{l}_1 = R \,.\, \cos\lambda \,.\, \arcsin\left(\frac{\sin\kappa}{\cos\lambda}\right), \tag{1}$$

$$\bar{l}_2 = R \,.\, \cos\kappa \,.\, \arccos\left(\frac{\sqrt{\cos^2\lambda - \sin^2\kappa}}{\cos\kappa}\right). \tag{2}$$

Während λ die geographische Breite des Punktes P ist, ist κ aber nicht dessen geographische Länge; diese ergibt sich aus $\bar{l}_1$ und dem Radius R. $cos\lambda$ des durch P verlaufenden horizontalen Breitenkreises zu ϕ (rad) $= \bar{l}_1/(R\,.\,cos\lambda)$.

Gleichungen (1) und (2) beinhalten die dem System horizontaler und vertikaler Breitenkreise inhärente Einschränkung $|sin\kappa| \leq |cos\lambda|$, die für $sin\kappa = cos\lambda$ $\kappa = \lambda = 45°$ ergibt. Für $\kappa = 0$ ($\lambda = 0$) erhält man erwarteterweise $\bar{l}_1 = 0$ (l_1) und $\bar{l}_2 = l_2$ (0). Für $\kappa = 90°$ ($\lambda = 90°$) muß wegen $|sin\kappa| \leq |cos\lambda|$ $\lambda = 0$ ($\kappa = 0$) sein, und es ergeben sich $(\bar{l}_1, \bar{l}_2) = (\pi R/2, 0)$ bzw. $(0, \pi R/2)$, i. e. 1/4 des Erdumfangs.

Der Vergleich von $l = R\,.\,\alpha(\alpha = \kappa$ oder $\lambda)$ mit $\bar{l}_1(\kappa, \lambda)$ und $\bar{l}_2(\kappa, \lambda)$ liefert für $\kappa = \lambda = 45°$ und 30° folgende Resultate:

(a) $l(45°) = 5000$ km $\bar{l}_1(45°, 45°) = \bar{l}_2(45°, 45°) = 7071$ km,
(b) $l(30°) = 3333$ km $\bar{l}_1(30°, 30°) = \bar{l}_2(30°, 30°) = 3393$ km.

Der Fall $\kappa = \lambda = 45°$ ist in dem Sinne ein Extremfall, daß $sin\kappa = cos\lambda$ ist und sowohl der horizontale als auch der vertikale Breitenkreisabschnitt sich über 1/4 des entsprechenden Kreisumfangs erstrecken im Vergleich zu 1/8 des Äquator- und Referenzmeridianumfangs, und daher ist die große Diskrepanz beim Vergleich (a) nicht unerwartet. Es ist jedoch bemerkenswert, daß für $\kappa = \lambda = 30°$ bei Äquator- bzw. Referenzmeridian-Längenabschnitten von 3333 km $\bar{l}_1$ und $\bar{l}_2$ nur um 60 km, i. e. um ungefähr 2 %, größer sind.

Wenn man den Referenzmeridian durch die Mitte Chinas verlaufen läßt, würde die Ost-West-Ausdehnung des Landes von etwa 7000 km (75°–135° östlicher Länge) dem Winkelbereich $-30° \leq \kappa \leq 30°$ entsprechen, und es wären bei Anwendung eines planaren, rektilinearen Koordinaten-Netzes höchstens in den Randgebieten etwa 2%ige Verschiebungen von $\bar{l}_1$ nach l_1 zu erwarten.

In der Nord-Süd-Richtung erstreckt sich China von $\lambda \simeq 20°$ bis 60° nördlicherBreite, und die Bedingung $|sin\kappa| \leq |cos\lambda|$ würde wohl $-30° \leq \kappa \leq 30°$ zulassen, doch würden für $\lambda = 60°$ die Verschiebungen (die allerdings in die Äußere Mongolei und auf Heilongjian fallen) vielleicht größer als 2 % sein. Es ist daher wünschenswert, die Äquator- und parallelen Horizontalkreisebenen derart um einen Winkel α zu rotieren, daß der Schnittpunkt des neuen Äquators mit dem Referenzmeridian auf einen vorgegebenen Koordinaten-Ursprung (z. B. die Hauptstadt) fällt. In diesem neuen System von vertikalen und rotierten horizontalen Breitenkreisen würde in China gemäß Gleichungen (1) und (2) $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ nirgends mehr als 2 % von (l_1, l_2) differieren. Die (l_1, l_2) Koordinaten können somit auf eine die Erdoberfläche im vorgegebenen Koordinaten-Ursprung berührenden Tangentialebene bis auf höchstens 2 % originaltreu übertragen werden. Die Umrechnung der Winkel ϕ und λ innerhalb des rotierten Parallelkreissystems auf die entsprechenden Winkel im ursprünglichen nicht rotierten System wird im nächsten Abschnitt angegeben.

Es soll hiermit aufgezeigt worden sein, daß die China-Karte von 1137 einer derartigen Darstellung entsprechen kann. Mit Hilfe des magneti-

schen Kompasses konnte die Nord-Süd-Richtung und orthogonal dazu die Ost-West-Richtung fixiert worden sein. Wie jedoch die Koordinatennetzpunkte im Lande gekennzeichnet blieben und wie innerhalb der 50 x 50 km^2 großen Koordinatenzellen die kartographischen Details in konsistenter Weise vermessen wurden, war die Aufgabe einer schon sehr früh zentral und lokal eingerichteten effizienten Organisation. Die geringe Zellengröße gewährleistete jedoch, daß fehlerhafte Darstellungen von Details höchstens in geringem Maße auftreten konnten.

3. Umrechnung der Winkel eines Punktes vom rotierten ins nicht rotierte Parallelkreissystem

Auf der Kugeloberfläche derErde ist jeder Punkt durch seine geographische Länge ϕ und Breite λ bezüglich Referenzmeridian und Äquator bestimmt. Falls der Ursprung des planaren, rektilinearen Koordinatensystems der Karte Chinas von 1137 bekannt ist, sind sowohl der Rotationswinkel β des Referenzmeridians bezüglich des Greenwich-Meridians als auch der Rotationswinkel α des Referenzäquators bezüglich des tatsächlichen Äquators gegeben.

Für den numerischen Vergleich der im planaren, rektilinearen Koordinatennetz der Karte Chinas abgelesenen Punktkoordinaten (l_1, l_2) mit den tatsächlichen Längen- und Breitenwerten des betreffenden Punktes P ist zuerst die Berechnung von κ, λ und ϕ mit Hilfe von Gleichungen (1) und (2) für $\bar{l}_1 = l_1$ und $\bar{l}_2 = l_2$ erforderlich. Anschließend sind aus den Winkeln ϕ und λ, die im rotierten Horizontalkreissystem definiert sind, die üblichen kartographischen Längen und Breiten σ und $\tau + \lambda$ bezüglich des Referenzmeridians und Äquators zu ermitteln.

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem im nicht rotierten Parallelkreissystem soll die x-Achse in der Äquatorebene liegen und auf den Referenzmeridian zeigen. Dann werde der Äquatorkreis um die y-Achse um einen Winkel α nach unten gedreht und mit dem tatsächlichen Äquator identifiziert. Man benötigt die Gleichungen von vier Flächen: (a) der Ebene des durch P verlaufenden Meridians, der zur Ebene des Referenzmeridians den Winkel ϕ hat: $y = \tan\phi \,.\, x$; (b) der um α nach unten rotierten (nun tatsächlichen) Äquatorebene: $z = -\tan\alpha \,.\, x$; (c) der Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; und (d) der nicht rotierten Äquatorebene: $z = 0$. Aus ihren Schnitten können drei vom Koordinaten-Ursprung ausgehende Vektoren gewonnen werden: (a) zum Schnittpunkt des Referenzmeridians mit dem nach unten rotierten Äquator (V_1); (b) zum Schnittpunkt des um ϕ rotierten Meridians mit dem nicht rotierten Äquator (V2); und (c) zum Schnittpunkt des um ϕ rotierten Meridians mit dem nach unten rotierten Äquator (V_3). V_1 und V_3 liegen in der um α nach unten rotierten (tatsächlichen) Äquatorebene und schließen den Winkel σ, die gesuchte geographische Länge bezüglich des Referenzmeridians, ein. V_2 und V_3 liegen in der um ϕ rotierten Meridianebene und schließen

den Winkel τ ein, der zum Winkel λ im nicht rotierten Horizontalkreissystem addiert werden muß, um die geographische Breite zu erhalten.

Die detaillierte Rechnung ergibt:

$$\cos\sigma = \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\phi \, . \, \sin^2\alpha}} \, , \tag{3}$$

$$\cos\tau = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\phi \, . \, \sin^2\alpha}} \, . \tag{4}$$

Gleichungen (3) und (4) liefern für $\alpha = 0$: $\cos\sigma = \cos\phi$ und $\cos\tau = 1$; für $\phi = 0$: $\cos\sigma = 1$ und $\cos\tau = \cos\alpha$; und für $\phi = 90°$: $\cos\sigma = 0$ und $\cos\tau = 1$, wie es sein muß. Damit verbleibt bloß, σ auf $\beta + \sigma$ zu ergänzen, um die geographische Länge eines betrachteten Punktes P bezüglich Greenwich zu erhalten.

4. Zusammenfassung

Am Beispiel der auf Stein gravierten Karte Chinas vom Jahr 1137, die ein 50 x 50 km^2 rektilineares Koordinatennetz aufweist, wurde darzulegen versucht, daß ein solches planares Koordinatennetz mit großer Genauigkeit imstande ist, großflächig die wahren geographischen Lagen fast unverzerrt natürlich wiederzugeben. Es wurde zu diesem Zweck ein System von horizontalen und vertikalen parallelen Breitenkreisen in Betracht gezogen, und es stellte sich mit Hilfe von abgeleiteten Formeln heraus, daß bei horizontalen und vertikalen Breiten von ±30° bezüglich eines Referenzmeridians bzw. -äquators die Koordinatenlängen auf den Breitenkreisen um nur 2 % größer sind als die entsprechenden auf den Referenzkreisen. Bei gegebenem Koordinatenursprung kann somit das chinesische planare rektilineare Koordinatennetz auf natürliche Weise mit einem auf der Tangentialebene, die die Kugeloberfläche der Erde am Koordinatenursprung berührt, identifiziert werden. Da das chinesische Koordinatennetz sehr engmaschig ist, kann geschlossen werden, daß die topographischen und geographischen Details innerhalb jeder Koordinatenzelle in Hinblick auf konsistente Entsprechungen innerhalb der Zelle und zwischen benachbarten Zellen eine beträchtliche Genauigkeit haben müssen, die sicherlich den damaligen Erfordernissen entsprochen hat. Abschließend wurden Formeln angegeben, die die geographischen Längen und Breiten nach einer Rotation des horizontalen Parallelkreissystems um einen Winkel α aus den Längen und Breiten vor dieser Rotation gewinnen lassen.

Referenzen

(1) Collier's Encyclopedia, Crowell-Collier Educational Corporation, USA, 1969

(2) JACQUES GERNET: Die chinesische Welt. Suhrkamp, p. 288.

(3) Information vom Institut für Kartographie der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und Diskussion